J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 10, No. 1, 48-53, Juli 2013
ISBN:1858-1382

Distribusi Invariant Rantai Markov Ergodik

Jusmawati Massalesse[1]

Abstrak

Sifat *long time behavior* dari Rantai Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ umumnya melibatkan distribusi invariant. Rantai Markov yang bersifat Ergodik menjamin eksistensi ketunggalan dari distribusi invariant yang positif. Dengan menambahkan asumsi $f: I \to \Re, I$ himpunan state maka untuk $n \to \infty$

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(X_k) \to \sum_{i\in E} \pi_i f_i\right) = 1.$$

Kata Kunci: Rantai Markov Ergodik, distribusi invariant.

1. Pendahuluan

Rantai Markov merupakan sebuah proses stokastik yang berkaitan dengan ruang state dan waktu diskrit. Secara intuitif dapat dinyatakan bahwa Rantai Markov adalah sebuah proses stokastik yang bersifat *memoriless*, yaitu *keadaan* (state) akan datang hanya bergantung pada keadaan sekarang, dan tidak bergantung pada keadaan sebelumnya.

Karena melibatkan waktu, maka perilaku dari sistem setelah berjalan cukup lama (*long time behavior*) menjadi salah satu kajian yang menarik dalam mempelajari Rantai Markov, terutama jika dikaitkan dengan sifat-sifatnya yang spesifik.

Tulisan ini mengulas perilaku jangka panjang dari sifat-sifat penting Rantai Markov, khususnya yang berkaitan sifat Ergodik.

2. Sifat-Sifat Rantai Markov

Pada bagian ini diuraikan mengenai beberapa sifat, istilah dan definisi yang melatarbelakangi pembahasan utama.

2.1. Rantai Markov Ergodik

Misalkan $(X_n)_{n\geq 0}$ merupakan sebuah Rantai Markov dengan matriks peluang transisi *P*. Sebuah Rantai Markov dengan himpunan state terdiri dari satu kelas ekuivalensi dikatakan *taktereduksi*.

State *i*dikatakan *recurrent* jika

$$P_i(X_n = i, \text{ n tak hingga}) = 1$$

[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin, email: jusmawati@gmail.com*

dan dikatakan *transient* jika

$$P_i(X_n = i, \text{ n tak hingga}) = 0$$

State recurrent i dikatakan *recurrent positif* jika ekspekatasi waktu sampai proses kembali ke state i adalah berhingga.State i dikatakan periodik dengan perioda d, d>1, jika

$$p_{ii}(n) = 0, \text{ untuk setiap } n, \; n \neq d, 2d, \ldots .$$

Jika d=1 maka state i dikatakan aperiodik.

Rantai Markov yang mempunyai state yang bersifat recurrent positif dan aperiodik disebut *Rantai Markov Ergodik.*

2.2. Distribusi Invariant

Kebanyakan sifat *long behavior* dari Rantai Markov melibatkan distribusi invariant.*Invariant probability* adalah peluang $\pi = (\pi_i \geq 0, \forall i)$ yang bersifat $\pi P = \pi$. Dalam pengertian lain bahwa untuk setiap $i \in I$,

$$\sum_{j \neq i} \pi_j P_{ji} = \pi_i (1 - P_{ii}) \qquad (1)$$

Hal ini juga berarti bahwa sistem dalam keadaan kesetimbangan, di mana rata-rata jumlah keberangkatan (*departure*) dari state i antara waktu n dan n+1 sama dengan rata-rata jumlah kedatangan ke state i pada rentang waktu yang sama.

$$\sum_{y \neq x} \pi_y P_{yx} = \pi_x (1 - P_{xx}) \qquad (2)$$

Jika P adalah matriks transisi dari Rantai Markov taktereduksi dan recurrent, maka terdapat distribusi invariant γ yang bersifat tunggal (Pardoux dalam [2]).

2.3. Teorema Ergodik

Misalkan didefinisikan

$$\begin{aligned} T_i &:= \inf \{n \geq 1; X_n = x\} \\ T_i^2 &:= \inf \{n \geq T_i; X_n = i\} \\ &:= T_i + \inf \{n \geq 1; X_{T_x + n} = i\} \end{aligned}$$

Maka ekskursi Rantai Markov antara 2 kunjungan berurutan ke state i dinotasikan dengan

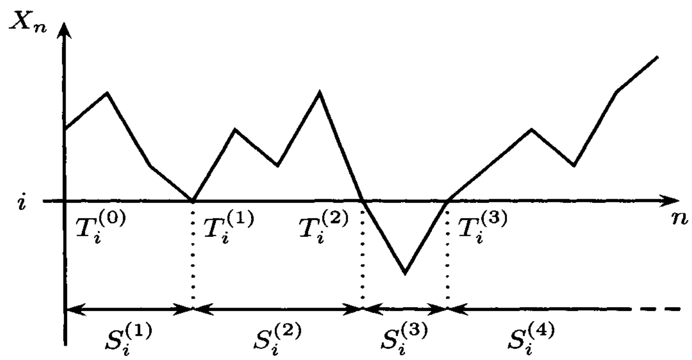
$$\varepsilon_k = (X_{T_i}^k, X_{T_i+1}^k, \ldots, X_{T_i}^{k+1}); \; k \geq 0 \qquad (3)$$

Panjang ekskursi ke-k ke state I, S_i^k, adalah:

$$S_i^k = \begin{cases} T_i^k - T_i^{k-1} & \text{jika } T_i^{k-1} < \infty \\ 0 & \text{dalam hal lain} \end{cases} \tag{4}$$

dimana $T_i^0 = 0; \quad T_i^1 = T_i$.

Ilustrasi mengenai definisi tersebut dapat dilihat pada Gambar di bawah ini.



Gambar 1.

Panjang ekskursi tersebut merupakan sebuah variabel random, paling sedikit 2 dan berhingga, yang merupakan gabungan dari elemen-elemen $I \setminus \{i\}$, kecuali awal dan akhir yang sama dengan i.

Misalkan U adalah himpunan barisan-barisan

$$u = (i, i_1, \ldots, i_n, i)$$

$n \geq 0; i_l \neq i, 1 < l \in \{1,2,\ldots n\}$. U himpunan terhitung dan merupakan himpunan semua kemungkinan ekskursi $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$. Sifat dari ekskursi $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$ dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema 1.
Barisan ekskursi $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$ bersifat i.i.d, yaitu terdapat peluang $(p_u, u \in U)$ dari U sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq 0, u_0, \ldots, u_k \in U$

$$P_x(u_0 = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_k) = \prod_{l=0}^{k} p_{u_l} \quad (5)$$

(Pardoux dalam [2]).

Teorema Ergodik.
Misalkan P adalah matriks transisi dari sebuah Rantai Markov taktereduksi dan recurrent dengan distribusi invariant $\pi = (\pi_i, i \in I)$. Jika $f : I \to \Re$ terbatas, maka untuk $n \to \infty$

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(X_k) \to \sum_{i\in E}\pi_i f_i\right) = 1 \tag{6}$$

Bukti.

Persamaan (6) ekuivalen dengan mengatakan bahwa $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(X_k)$ konvergen ke $\sum_{i\in E}\pi_i f_i$, atau

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(X_k) \to \sum_{i\in E}\pi_i f_i \tag{7}$$

Misalkan $V_i(n) = \sum_{0\le k\le n-1} 1_{\{X_k = i\}}$. Akan diselidiki limit dari $\frac{V_i(n)}{n}$ untuk $n \to \infty$.

Misalkan $S_i^0, S_i^1, \ldots, S_i^k, \ldots$ menyatakan panjang ekskursi $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ yang dimulai pada state *i*. Selanjutnya, karena

$$S_i^0 + S_i^1 + \ldots + S_i^{V_i(n)-1}$$

menyatakan waktu kunjungan terakhir ke state *i* sebelum waktu *n* dan

$$S_i^0 + S_i^1 + \ldots + S_i^{V_i(n)}$$

menyatakan waktu kunjungan pertama ke state *i* setelah *n*-1 maka

$$S_i^0 + S_i^1 + \ldots + S_i^{V_i(n)-1} \le n \le S_i^0 + S_i^1 + \ldots + S_i^{V_i(n)}$$

Jadi

$$\frac{S_i^0 + S_i^1 + \ldots + S_i^{V_i(n)-1}}{V_i(n)} \le \frac{n}{V_i(n)} \le \frac{S_i^0 + S_i^1 + \ldots + S_i^{V_i(n)}}{V_i(n)}$$

Karena variabel ε_k *i.i.d*berakibat S_i^k juga *i.i.d*maka untuk $n \to \infty$ berlaku

$$\frac{S_i^0 + S_i^1 + \ldots + S_i^{V_i(n)-1}}{V_i(n)} \to m_i$$

Demikian pula, $V_i(n) \to \infty$ sehingga

$$\frac{S_i^0 + S_i^1 + \ldots + S_i^{V_i(n)}}{V_i(n)} \to m_i$$

Hal ini berakibat

$$\frac{n}{V_i(n)} \to m_i$$

Atau

$$\frac{V_i(n)}{n} \to \frac{1}{m_i}$$

Misalkan $(X_n)_{n\geq 0}$ mempunyai distribusi invariant $\pi = (\pi_i, i \in I)$ dan $\bar{f} = \sum_{i\in I} \pi_i f_i$.

Berdasarkan asumsi ke***terbatas***an fungsi *f*, misalkan $c = \sup_{i\in I} |f_i|$. Untuk setiap $J \subseteq I$ maka

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \bar{f}\right| &= \left|\sum_{i\in I}\left(\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right) f_i\right| \\
&\leq \sum_{i\in I}\left|\left(\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right) f_i\right| \\
&\leq \sum_{i\in J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| |f_i| + \sum_{i\notin J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| |f_i| \\
&\leq \sum_{i\in J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| |f_i| + \sum_{i\notin J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| |f_i| \qquad (8) \\
&\leq c\sum_{i\in J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| + c\sum_{i\notin J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| \\
&\leq c\sum_{i\in J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| + c\sum_{i\notin J}\left|\frac{V_i(n)}{n} + \pi_i\right| \\
&\leq 2\sum_{i\in J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| + 2c\sum_{i\notin J}\pi_i
\end{aligned}$$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Pilih *J* sedemikian sehingga

$$\sum_{i\notin J}\pi_i < \frac{\varepsilon}{4c} \quad .$$

Kemudian pilih bilangan asli $N(\omega)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N(\omega)$ maka

$$\sum_{i\in J}\left|\frac{V_i(n)}{n} - \pi_i\right| < \frac{\varepsilon}{4c}$$

Akibat dari persamaan (8)

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \bar{f}\right| < 2c.\frac{\varepsilon}{4c} + 2c.\frac{\varepsilon}{4c} = \varepsilon$$

Jadi

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(X_k) \to \sum_{i\in E}\pi_i f_i$$

Atau $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(X_k)$ konvergen ke $\sum_{i\in E}\pi_i f$ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(X_k)$

Jadi terbukti

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(X_k) \to \sum_{i\in E}\pi_i f_i\right) = 1. \blacklozenge$$

Daftar Pustaka

[1] Norris J.R., 1997. *Markov Chains*. Cambridge University Press, United Kingdom.

[2] Pardoux E., 2008. *Markov Process and Applications*. John Wiley and Sons Ltd., United Kingdom.